

FISICA E...

RETI SMALL WORLD: L'ARCHITETTURA DI UN SISTEMA COMPLESSO

V. Latora

Dipartimento di Fisica e Astronomia,
Università di Catania,
e INFN Sezione di Catania,
Via S. Sofia 64, I-95123 Catania, Italy

1. – Introduzione

Quello sui sistemi complessi è un settore di ricerca interdisciplinare in grande espansione negli ultimi anni, e di straordinario interesse sia per la comprensione del mondo in cui viviamo che per le possibili ricadute applicative⁽¹⁻³⁾. Da un punto di vista concettuale lo studio dei sistemi complessi ha causato una vera e propria rivoluzione nel nostro modo di pensare. Infatti per decenni ogni buon fisico è stato educato all'approccio *riduzionistico*, che consiste nell'affrontare un qualunque sistema o problema fisico scomponendolo in una serie di parti, di elementi semplici. Il metodo riduzionistico è la chiave *pass-partout* per aprire il forziere delle meraviglie della natura: l'idea di base infatti è che un qualunque sistema all'apparenza complicato può essere compreso una volta che viene scomposto nei suoi costituenti elementari. La complessità di ogni sistema va solo ricercata quindi nella complessità dei suoi costituenti. Il paradigma riduzionistico, che è stato alla base delle più grandi scoperte scientifiche dell'800 e del '900, ha iniziato a vacillare negli ultimi 30 anni a causa dell'affermarsi del caos deterministico⁽⁴⁾, ed ha ora visto definitivamente sanciti i suoi limiti con la nascita di un vasto movimento di interessi e ricerche su problemi multidisciplinari e la nascita di una nuova scienza, la

scienza dei *sistemi complessi*. Infatti, le principali caratteristiche di un sistema complesso sono proprio: la presenza di numerosi elementi che interagiscono non linearmente e che sono fortemente interdipendenti, e la comparsa a livello globale di proprietà cosiddette emergenti, come la capacità di auto-organizzazione, proprietà che non si possono spiegare a partire dalle proprietà degli elementi costituenti il sistema^(5,6). Quando parliamo di sistemi complessi abbiamo naturalmente in mente i sistemi complessi per eccellenza cioè i sistemi biologici, ed in special modo quei sistemi che hanno a che fare con gli esseri umani: il nostro corpo, la società in cui viviamo, le nostre culture. Anche se sappiamo che il nostro corpo è fatto di atomi, e la meccanica quantistica ci dà delle informazioni complete e dettagliate di come gli atomi si comportano, le nostre conoscenze di fisica atomica non ci permettono di fare delle previsioni su come funzionano gli organi del nostro corpo, o sul comportamento sociale di un essere umano. Analogamente il cervello non è semplicemente una somma di tanti neuroni, così come un sistema sociale non è una semplice somma di tanti individui. Quando si studia un sistema vivente l'approccio riduzionistico non può funzionare. Un sistema complesso va studiato nella sua integrità perché non è una somma delle parti⁽⁷⁾.

I sistemi complessi hanno naturalmente attirato l'attenzione dei fisici, visto che i metodi sviluppati per lo studio della dinamica dei sistemi caotici e in meccanica statistica si sono rivelati indispensabili nello studio teorico e nella modellizzazione di sistemi biologici, sociali ed economici. È interessante notare come Ettore Majorana, nel suo ultimo articolo pubblicato postumo su «Scientia»⁽⁸⁾, parli, già 60 anni fa, delle forti analogie tra termodinamica/meccanica statistica e scienze sociali. Si può forse considerare il lavoro di Majorana come il primo articolo sui sistemi complessi.

* Relazione presentata da V. Latora al LXXXVIII Congresso SIF, Alghero, Italy, Settembre 2002.

Il presente articolo non intende essere una rassegna sui sistemi complessi — per una introduzione generale allo studio dei sistemi complessi consigliamo un articolo divulgativo di Michel Baranger⁽⁹⁾ —, voglio piuttosto soffermarmi su di un aspetto ben particolare dello studio dei sistemi complessi: l'architettura di un sistema complesso. Grazie alla disponibilità sempre maggiore di dati di sistemi reali, si è recentemente iniziato a studiare le proprietà di connettività dei sistemi complessi. Infatti, un generico sistema complesso si può, in prima approssimazione, descrivere come una rete, un *network*, o in termini matematici un grafo. Un grafo è un'entità costituita sostanzialmente da vertici (o nodi) ed archi (o spigoli). I vertici rappresentano gli elementi della rete, mentre gli archi connettono coppie di nodi e rappresentano le relazioni fra gli elementi. Ad esempio, in un sistema sociale i nodi sono gli individui e gli archi rappresentano i rapporti sociali fra individui, che possono essere di varia natura, ad esempio legami di parentela, o legami di amicizia, o rapporti sessuali, a seconda del tipo di studio a cui si è interessati. In un cervello i nodi sono i neuroni e gli archi sono le sinapsi. Uno studio delle proprietà di connettività, cioè di chi è connesso a chi, è il primo passo per comprendere come funziona un sistema complesso. Un risultato molto importante emerso recentemente (lo studio dei *networks* di sistemi complessi da parte dei fisici ha avuto il suo apice negli ultimi 5 anni) è che *networks* apparentemente diversi di vari sistemi biologici, sociali e tecnologici mostrano tutti la stessa architettura, una architettura che non è né completamente regolare né completamente random. Questa classe particolare di reti è stata nominata *small world networks*, in analogia con il fenomeno dello *small world* evidenziato sperimentalmente 40 anni fa da dei sociologi americani⁽¹⁰⁾.

2. – I sei gradi di separazione ed il fenomeno dello *small world*

Kevin Bacon è un attore di Hollywood che ha recitato in numerosi films e che negli ultimi anni è diventato famoso per un gioco a lui ispirato. Il gioco di Kevin Bacon, popolare fra i *teenagers* americani, consiste nello scegliere un attore a caso, chiamiamolo *A*, e cercare di determinare il numero di Bacon di *A*. Se *A* ha recitato insieme a

Bacon in almeno un film allora l'attore *A* ha numero di Bacon 1. Se invece *A* non ha mai recitato insieme a Bacon, ma ha recitato con un attore *B* e questi a sua volta ha partecipato ad un film con Bacon, allora l'attore *A* ha numero di Bacon 2. E così via, il gioco consiste nel determinare il percorso più breve da *A* a Bacon tramite una catena di collaborazioni. Qualche anno fa Brett Tjaden ha addirittura costruito un *web site*, l'Oracolo di Bacon⁽¹¹⁾, che, utilizzando l'archivio di films dell'*International Movie Database*⁽¹²⁾, è capace di calcolare il minimo numero di Bacon di un attore scelto a caso. Per fare un esempio a noi caro, l'Oracolo ci dice che Marcello Mastroianni ha numero di Bacon 2. Anche attori appartenenti a periodi diversi hanno un numero di Bacon piccolo (2 per Elvis Presley e Marilyn Monroe), e si trova come risultato generale che il più grande numero di Bacon finito, che si ottiene considerando tutti gli attori di tutti i periodi è solo 8. Chiaramente questo non significa che Kevin Bacon è il centro del mondo degli attori, anzi ci sono molti altri attori che sono più centrali di Bacon. In realtà, la stessa proprietà è valida per tutti gli attori, cioè per ogni coppia di attori è possibile trovare un percorso breve che li collega. Inoltre, questa, che a prima vista potrebbe sembrare una proprietà tipica di un *network* sociale sicuramente molto particolare, come il network di collaborazione degli attori di Hollywood, è invece una caratteristica tipica di tutti i sistemi sociali.

Infatti, quante volte è capitato a tutti noi di scoprire delle amicizie in comune con una persona appena incontrata ad una festa, apparentemente uno sconosciuto, e di esclamare “ma come è piccolo il mondo!”. Ebbene, il cosiddetto fenomeno dello *small world* è stato interesse di studio dei sociologi già 40 anni fa. Nel 1967 Steven Milgram effettuò il primo di una serie di esperimenti volti a misurare il numero di passaggi necessari per connettere due persone, scelte a caso, negli Stati Uniti⁽¹⁰⁾. Milgram chiese ad un centinaio di persone di Omaha in Nebraska (appartenenti a varie tipologie sociali) di recapitare una lettera ad un individuo *target*, uno *stockbroker* di Boston (identificato solo dal nome, dalla professione, e dalla città) utilizzando una catena di amicizie. Ad ogni partecipante all'esperimento veniva richiesto di passare la lettera a quello dei suoi amici che lui reputava il più vicino possibile al *target*, con lo scopo di raggiungere il *target* con il minore numero di passaggi possibili. Ci si aspettava che la

lettera dovesse compiere centinaia di passaggi prima di raggiungere il *target* finale. Invece, analizzando il percorso compiuto dalle lettere arrivate a destinazione Milgram misurò una lunghezza media di 6 passaggi e questo risultato fu alla base della famosa nozione popolare dei “sei gradi di separazione”: nonostante la popolazione mondiale stimata nel 2003 sia di circa $6 \cdot 10^9$, due persone possono essere connesse tramite una catena lunga solo 6 passi!! Questo risultato diventa ancora più interessante se si pensa a quanto i *networks* sociali siano importanti per le comunicazioni: infatti, la diffusione di idee, di mode, ma anche di malattie, è basata sui contatti fra individui, e questa diffusione è molto più veloce in un *network* con una breve distanza di separazione fra due individui, rispetto ad un *network* meno connesso. La struttura di un sistema sociale è anche la prima cosa da conoscere quando si vuole scegliere la migliore strategia per pubblicizzare un prodotto.

3. – Reti *Small World*: il modello di Watts e Strogatz

Il più semplice *network* che possiamo pensare di costruire per modellizzare un sistema sociale è un *albero di Cayley*. Un albero di N nodi e K archi è un grafo di N nodi con il minimo numero di archi affinché tutti i nodi siano connessi fra di loro, cioè con $K = N - 1$. Un albero di Cayley è un albero in cui tutti i nodi hanno lo stesso *grado* k , dove il grado di un nodo è il numero di archi incidenti sul nodo (in una rete sociale il numero di conoscenti diretti di un individuo). Un albero di Cayley si ottiene come in fig. 1 assumendo che un nodo sia connesso direttamente ad altri k nodi, e ciascuno di questi sia a sua volta collegato ad altri $k - 1$ nodi distinti da

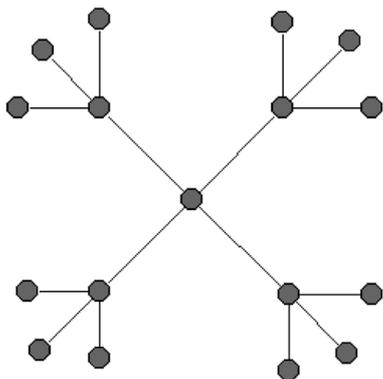


Fig. 1. – Albero di Cayley con $k = 4$ archi per nodo.

quelli precedenti, e così via. Dal nodo centrale quindi si possono raggiungere k nodi in un passo, $k(k - 1)$ nodi in due passi, e in generale $k(k - 1)^{D-1}$ nodi in D passi. Se $k \gg 1$ allora si può assumere che $N \sim k^D$ cioè che il numero di nodi del grafo è approssimativamente uguale al numero dei nodi esterni. Di conseguenza il numero di passi necessario per raggiungere dal nodo centrale i nodi più esterni di un albero di Cayley di N nodi è uguale a $D \sim \log N / \log k$, cioè dipende dal logaritmo del numero di nodi del grafo. Per avere un'idea concreta di questo risultato basta pensare che in un sistema sociale di $N = 10^9$ individui, ognuno di questi con $k = 100$ amici, si ottiene un numero piccolissimo: $D = 4,5$. Un risultato del tutto simile si ottiene se si considera un *grafo random* come quello mostrato in fig. 2, cioè un grafo in cui i K archi uniscono coppie di nodi scelti a caso. I grafi random, sono stati introdotti da Paul Erdős ed Alfred Rényi negli anni 50⁽¹³⁾ e sono sicuramente i grafi più amati dai matematici e più studiati in letteratura⁽¹⁴⁾. Per un grafo random è possibile provare analiticamente che la distanza media fra due nodi L è uguale a $\log N / \log k$, dove k è il numero medio di archi per nodo. Nonostante questi due semplici esempi mostrino che non è impossibile trovare dei *networks* che pur avendo un numero enorme di nodi esibiscono la proprietà di *small world*, né un albero di Cayley né il grafo random sono delle modellizzazioni soddisfacenti di un sistema sociale. Infatti entrambi questi grafi mancano di una proprietà fondamentale di ogni sistema sociale: il concetto di gruppo o comunità. Infatti, nella costruzione di un albero di Cayley, si è imposto che non vi sia alcun legame diretto (arco) fra i k amici di un generico individuo. Analogamente per un grafo random si prova che il numero di

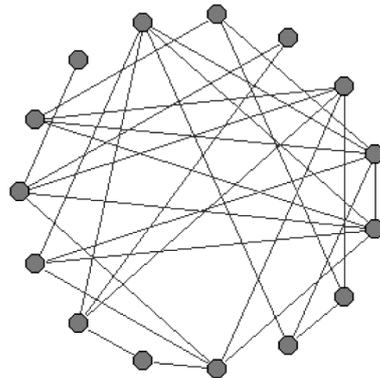


Fig. 2. – Grafo random alla Erdős-Rényi, con un media di $k = 4$ archi per nodo.

legami diretti fra i k amici di un generico individuo non è nullo ma tende a zero al crescere di N . Questa è sicuramente un'assunzione troppo forte per un sistema sociale che invece presenta quella che viene definita proprietà di *clustering*. Infatti, noi sappiamo benissimo che nella maggior parte dei casi due dei nostri amici si conoscono anche direttamente tra di loro!! Un grafo che presenta spiccate proprietà di *clustering* simili a quelle di un sistema sociale è un *reticolo regolare*. Nella fig. 3 si mostra un reticolo regolare in 1 dimensione con $k = 4$ archi per nodo e con condizioni al contorno periodiche. Si nota chiaramente che i primi vicini di un nodo sono connessi fra di loro. Purtroppo il prezzo da pagare per avere le proprietà di *clustering* è che la distanza media fra due nodi dipende linearmente e non logaritmicamente dalla dimensione del sistema. Si prova infatti che $L \sim N/2k$, e quindi il reticolo regolare non mostra le proprietà di *small world*. Nel 1998 due ricercatori di Cornell, Duncan Watts e Steven Strogatz, propongono un metodo per costruire reti di tipo small-world con proprietà di *clustering*, e mostrano che altri *networks* di natura totalmente diversa mostrano proprietà analoghe a quelle dei sistemi sociali^(15,16). Il formalismo di Watts e Strogatz è sviluppato in termini di un grafo G , con N nodi e K archi, *non pesato* (agli archi non è associato nessun peso, cioè gli archi sono tutti equivalenti), *sparso* ($K \ll N(N-1)/2$), e *connesso* (esiste almeno un percorso per connettere una qualunque coppia di nodi). G può essere rappresentato tramite una matrice $N \cdot N$ il cui generico elemento a_{ij} è uguale ad 1 se esiste un arco fra il nodo i ed il nodo j , e uguale a 0 altrimenti. In termini della matrice di adiacenza, il grado k_i di un nodo i è definito come

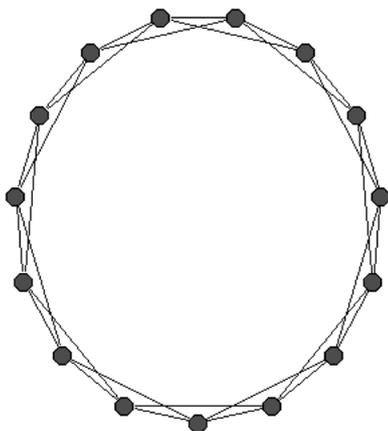


Fig. 3. – Grafo regolare con $k = 4$ archi per nodo.

$k_i = \sum_j a_{ij}$. Il valore medio di k_i è $\bar{k} = 2K/N$. A partire dalla matrice di adiacenza $\{a_{ij}\}$ è possibile derivare⁽¹⁷⁾ la matrice $\{d_{ij}\}$ che dà il numero di passi del percorso più breve per collegare ogni coppia di nodi i e j . Watts e Strogatz propongono di quantificare le proprietà strutturali di un grafo calcolando le due quantità seguenti: la lunghezza caratteristica L ed il coefficiente di *clustering* C . L è la lunghezza media del percorso tra due nodi, definita come

$$(1) \quad L(G) = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1, i \neq j}^N \sum_{j=1}^N d_{ij},$$

mentre il coefficiente di *clustering* C del grafo è dato da

$$(2) \quad C(G) = \frac{\sum_{i=1}^N C_i}{N}$$

dove

$$(3) \quad C_i = \frac{\# \text{ archi in } G_i}{k_i(k_i - 1)/2}$$

è il coefficiente di *clustering* del nodo i . C_i è proporzionale al numero di archi che esistono nel sottografo G_i , il grafo di k_i nodi che si ottiene da G considerando i primi vicini del nodo i e tutti gli archi che esistono fra questi nodi. C_i è una quantità che varia in $[0,1]$ grazie al fattore di normalizzazione $k_i(k_i - 1)/2$ che è il numero massimo di archi che ci possono essere in un grafo di k_i nodi. In altri termini C_i misura quanto è connesso "clusterizzato" il gruppo degli amici dell'individuo i , una volta che i viene rimosso dal gruppo. In rif.⁽¹⁵⁾ viene proposto un modello per costruire grafi con proprietà intermedie fra quelle del grafo regolare e quelle del grafo random. Si considera ognuno dei K archi del grafo regolare e con probabilità p , detta probabilità di *rewiring*, lo si rimuove da uno dei due nodi a cui è connesso e lo si ricollega ad uno nodo scelto a caso. In questo modo, al variare di p si riesce a passare in maniera continua da un grafo regolare ($p = 0$) ad uno random ($p = 1$). Per il grafo regolare ci si aspetta $L \sim N/2k$ ed un alto coefficiente di clustering $C = 3/4(k-2)/(k-1)$, mentre per il grafo random $L \sim \log N / \log(k-1)$ e $C \sim k/N$ ^(14, 18). Quindi, sebbene nei due casi limite ad un grande valore di C è associato un grande valore di L e viceversa, le simulazioni numeriche mostrano⁽¹⁵⁾ un regime intermedio in cui il grafo è fortemente "clusterizzato" come un reticolo

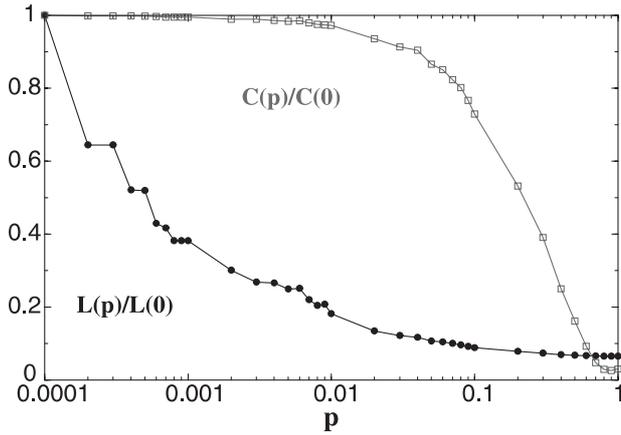


Fig. 4. – Le due quantità L e C normalizzate ai valori $L(0)$ e $C(0)$ del reticolo regolare in funzione della probabilità di *rewiring* p . La figura si riferisce a grafi con $N=1000$, $K=5000$. Per $p \sim 0.01$ si osserva il fenomeno dello *small world*: il grafo ha un valore di L simile a quello del grafo random, pur avendo un coefficiente di *clustering* C grande come quello del reticolo regolare.

regolare pur avendo una piccola lunghezza caratteristica L come un grafo random. Vedi fig. 4. Il regime di *small world* si ottiene per piccoli valori di p : infatti, sono sufficienti solo alcuni archi random per rendere L piccola senza alterare le proprietà di *clustering* del reticolo regolare. Utilizzando le due variabili L e C è possibile studiare le proprietà di *networks* reali. Come esempio di un sistema sociale Watts e Strogatz considerano proprio il grafo delle collaborazioni fra attori, costruito a partire dall'*International Movie Database*⁽¹²⁾ (aggiornato al 1997) nel modo seguente: due attori sono connessi da un arco se hanno recitato insieme almeno in un film. Il grafo che si ottiene non è connesso, per cui l'analisi viene ristretta alla più grande componente connessa del grafo che ha $N = 225226$ e $\bar{k} = 61$. I risultati riportati in tabella I mostrano che il sistema considerato è uno *small world* in quanto ha lunghezza caratteristica L dell'ordine di L_{rand} cioè della lunghezza caratteristica che si ottiene per un grafo random con lo stesso numero di nodi ed archi, ma coefficiente di *clustering* C molto più grande di C_{rand} . Watts e Strogatz riescono a provare che anche altri due reti, di natura totalmente differente, mostrano le proprietà di *small world*. Il primo *network* è il sistema nervoso di un piccolo nematode, il *Caenorhabditis elegans* (*C. elegans*)⁽¹⁹⁾ mentre il secondo è una rete di trasporto di energia elettrica negli Stati Uniti, un esempio di una rete costruita dall'uomo. Nel primo caso i nodi

Tabella I. – Lunghezza caratteristica e coefficiente di *clustering* di alcuni *networks* reali e dei corrispondenti grafi random con lo stesso numero di vertici e di archi. I primi tre esempi sono stati studiati in rif. (15), gli altri rispettivamente in rif. (20), rif. (21) rif. (22), rif. (23).

	L	L_{rand}	C	C_{rand}
Attori	3,65	2,99	0,79	0,00027
<i>C. elegans</i>	2,65	2,25	0,28	0,05
Rete elettrica	18,7	12,4	0,08	0,005
SPIRES	4	7,52	0,72	0,003
Metabolismo	3,88	3,78	0,48	0,0017
WWW	3,1	2,88	0,11	0,0002
Internet	3,7	2,1	0,24	0,0007

del grafo rappresentano i neuroni e due nodi sono collegati da un arco se esiste almeno una sinapsi fra i corrispondenti neuroni. Nel secondo caso i nodi sono i generatori e le stazioni elettriche, mentre gli archi rappresentano le linee di alta tensione. Si ottengono, rispettivamente un grafo con $N = 282$ e $\bar{k} = 14$ ed un grafo con $N = 4941$ e $\bar{k} = 2,67$: entrambi mostrano le proprietà di *small world*.

All'articolo dei due ricercatori di Cornell è seguita tutta una serie di studi sulle proprietà di *small world* in reti di vario tipo. In tabella I riportiamo alcuni dei risultati ottenuti. In particolare, Mark Newman del Santa Fe Institute ha studiato il grafo delle collaborazioni scientifiche⁽²⁴⁾ analizzando i vari *databases* di *preprints* ed articoli disponibili in rete (SPIRES, NANL, MEDLINE), ed ha pubblicato i risultati in un articolo dal titolo *Who is the best connected scientist?*⁽²⁰⁾. Oltre a verificare che la comunità scientifica è uno *small world*, Newman ha prodotto delle liste dei vari scienziati ordinati a seconda del numero di articoli firmati, del numero di collaboratori, o di varie altre misure di centralità⁽²⁵⁾ come la *closeness* (la distanza media fra un autore e tutti gli altri) o la *betweenness*^(26,27). Fell e Wagner hanno studiato la rete di reazioni biochimiche che governa il metabolismo dell'*Escherichia coli*⁽²³⁾, trovando che anche la topologia di questo *network* presenta proprietà di tipo *small world*. Altri esempi di *small world* apparsi in letteratura riguardano i campi più disparati: reti di animali sociali come i delfini⁽²⁸⁾, collaborazioni fra musicisti jazz, circuiti elettronici⁽²⁹⁾, *networks* di e-mail⁽³⁰⁾, e perfino il *network* delle collaborazioni fra i supereroi della Marvel⁽³¹⁾.

In parallelo a questi lavori, basati sulla ricerca delle proprietà di *small world* in natura e nelle

reti costruite dall'uomo, si è visto un grande interesse verso: la caratterizzazione della transizione di fase a *network* di tipo *small world* nel modello di Watts e Strogatz^(18,32,33); lo studio di modelli di spin^(18,34), modelli percolativi e di diffusione di epidemie⁽³⁵⁾ su reti di tipo *small world*; la sincronizzazione di sistemi biologici o nervosi in cui le unità sono connesse con una topologia di *small world*⁽³⁾.

4. – Estensione a reti pesate

Come abbiamo visto, l'approccio di Watts e Strogatz è valido nel caso in cui un *network* reale è descritto bene da un grafo non pesato, cioè quando l'unica informazione che si vuole mantenere è l'esistenza o meno di un arco e non vi è necessità di associare alcun peso all'arco. Una generalizzazione del formalismo ai grafi pesati, valida anche per i grafi non connessi, permette una analisi più dettagliata delle reti reali e di ampliare ulteriormente le possibili applicazioni. Ad esempio, tutti i tre *network* studiati in rif.⁽¹⁵⁾ possono essere meglio descritti da un grafo pesato. Infatti, nel caso degli attori si è considerato se due attori hanno recitato insieme, ma non si è tenuto conto del numero di film fatti insieme: due attori che hanno recitato insieme in decine di films sono sicuramente in relazione molto più stretta di due attori che hanno fatto solo un film insieme. Inoltre, per evitare che la lunghezza caratteristica L definita in formula (1) diverga, è stato possibile considerare solo la più grande componente connessa del grafo. In maniera del tutto analoga, nel caso del sistema nervoso del *C. elegans*, non si è tenuto conto che vi sono coppie di neuroni connesse da più di una sinapsi. E nel caso della rete elettrica, così come in generale in tutti i sistemi di trasporto come reti ferroviarie e autostrade, ogni arco ha una lunghezza propria legata alla distanza geografica fra i nodi. Considerare un grafo non pesato è certamente una descrizione povera di questi sistemi. Insieme a Massimo Marchiori, del Dipartimento di Informatica del MIT, abbiamo proposto in rif.⁽³⁶⁾ una generalizzazione delle idee di Watts e Strogatz per grafi pesati. La nostra definizione di *small world* è basata su di un unico concetto, quello di efficienza del *network*, e su di un'unica variabile che permette di misurare sia le proprietà di connettività globali del *network* che quelle locali di *clustering*.

Consideriamo, quindi, un grafo \mathbf{G} pesato e non necessariamente connesso e sparso. Per descrivere il grafo, adesso è necessario utilizzare oltre alla matrice di adiacenza $\{a_{ij}\}$ anche una matrice $\{\ell_{ij}\}$. Chiamiamo questa matrice, matrice delle distanze fisiche, perché, per semplicità, immaginiamo di considerare una rete elettrica o una rete di trasporto, cioè un caso in cui ℓ_{ij} è la distanza euclidea fra il nodo i ed il nodo j . Più in generale, si può immaginare ℓ_{ij} uguale all'inverso del numero di films in cui i due attori i e j hanno recitato insieme, oppure uguale all'inverso del numero di sinapsi fra la coppia di neuroni i e j nel sistema nervoso del *C. elegans*. Oppure, nel caso di un rete *Internet*, possiamo assumere ℓ_{ij} uguale al tempo impiegato da due *routers* per scambiare un'unità di informazione. La matrice $\{d_{ij}\}$ adesso rappresenta non il numero di salti ma la lunghezza del percorso più breve fra i e j e viene calcolata al computer utilizzando sia la matrice di adiacenza che quella delle distanze fisiche. Si ha $d_{ij} \geq \ell_{ij} \forall i, j$ dove l'uguaglianza è valida quando c'è un arco fra i e j . Immaginiamo adesso che ogni nodo comunichi con gli altri tramite i percorsi più brevi e definiamo l'efficienza ε_{ij} nella comunicazione fra i e j come $\varepsilon_{ij} = 1/d_{ij} \forall i, j$. Se non vi è alcun percorso sul grafo per connettere i e j , allora $d_{ij} = +\infty$ e di conseguenza $\varepsilon_{ij} = 0$. L'efficienza globale di \mathbf{G} è l'efficienza media del sistema definita come

$$(4) \quad E_{\text{glob}}(\mathbf{G}) = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1, i \neq j}^N \sum_{j=1}^N \varepsilon_{ij}$$

e gioca un ruolo simile all'inverso della variabile L .

Per quantificare il grado di *clustering* di \mathbf{G} è possibile utilizzare lo stesso concetto di efficienza e calcolare per ogni nodo i l'efficienza di \mathbf{G}_i , il sottografo dei k_i vicini di i . Si definisce efficienza locale di \mathbf{G} la quantità

$$(5) \quad E_{\text{loc}}(\mathbf{G}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E(\mathbf{G}_i),$$

dove

$$(6) \quad E(\mathbf{G}_i) = \frac{\sum_{l=1}^{k_i} \sum_{m=1}^{k_i} \varepsilon'_{lm}}{k_i(k_i - 1)},$$

e dove le ε'_{lm} sono le efficienze calcolate dalle distanze più brevi su \mathbf{G}_i . E_{loc} gioca un ruolo simile a C , ed è una misura di quanto il sistema è localmente resistente agli errori, cioè di quanto è efficiente la comunicazione fra i primi vicini di

un generico nodo quando questo viene rimosso. Le efficienze globali e locali vengono poi normalizzate al grafo totalmente connesso, cioè al grafo che ha archi fra tutte le coppie di nodi, in modo da avere due quantità che variano fra 0 ed 1 (per i dettagli vedi ⁽³⁶⁾). Adesso la definizione di *small worlds* può essere rifrasata in termini del flusso di informazione: infatti, un *network* di tipo *small world* è un *network* in cui la comunicazione è molto efficiente sia a livello globale che a livello locale. Questa definizione è valida sia per grafi pesati che per grafi non pesati, e pure nel caso in cui il grafo non è né connesso né sparso. Proprio per trattare insieme grafi sparsi e grafi non sparsi, risulta utile definire una variabile per quantificare il costo di una rete:

$$(7) \quad \text{Costo}(\mathbf{G}) = \frac{\sum_{i=1, i \neq j}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} \ell_{ij}}{\sum_{i=1, i \neq j}^N \sum_{j=1}^N \ell_{ij}}$$

Il costo è definito come il rapporto fra la somma delle lunghezze degli archi in \mathbf{G} e la somma delle lunghezze degli archi nel caso di un grafo completamente connesso, ed è quindi anche questa una quantità che varia nell'intervallo $[0, 1]$. Per un grafo non pesato, il costo si riduce a $2K/N(N-1)$, ed è proporzionale al numero di archi del grafo. Se si calcolano E_{glob} ed E_{loc} per il modello di Watts e Strogatz considerato precedentemente, si vede che al variare di p il modello produce *networks* efficienti sia globalmente che localmente. Ma il modello di Watts e Strogatz costruisce *networks* non pesati e tutti con lo stesso numero di archi, cioè con lo stesso costo. È possibile ideare tutta una serie di modelli per costruire *networks* pesati con le proprietà di *small world* e che mostrano come il costo è una variabile molto importante. Per i dettagli sui modelli rimandiamo il lettore interessato al rif. ⁽³⁶⁾. In generale, possiamo dire che l'alta efficienza globale e locale implica un alto costo del *network*, sebbene questo non sia sempre vero. Qui ci occupiamo invece di mostrare delle applicazioni allo studio di reti reali. In tabella II riportiamo i risultati per due degli esempi studiati in rif. ⁽¹⁵⁾, da noi considerati come *networks* pesati. Entrambi questi sistemi sono degli *small world* anche se considerati come *networks* pesati, sono cioè dei sistemi efficienti sia globalmente che localmente. Il *C. elegans*, ad esempio ha, sia al livello globale che al livello locale, una efficienza uguale a

Tabella II. – Efficienza globale, efficienza locale e costo di alcuni *networks* reali ⁽³⁶⁾. I primi due esempi sono gli stessi considerati in rif. ⁽¹⁵⁾, ma qui trattati come grafi pesati. Il terzo esempio è la rete di trasporto urbano di Boston: metropolitana e metropolitana più sistema di autobus ⁽³⁷⁾.

	Costo	E_{glob}	E_{loc}
Attori	0,0005	0,29	0,52
<i>C. elegans</i>	0,18	0,35	0,34
Metro	0,002	0,63	0,03
Metro + bus	0,004	0,72	0,46

circa il 35% di quella del grafo totalmente connesso, con un costo di solo il 18%. Il terzo esempio riguarda la rete metropolitana della città di Boston. Si tratta di un grafo costituito da $N = 124$ nodi (le stazioni) e $K = 124$ archi (i tunnel fra stazioni), in cui ad ogni arco è associata la distanza euclidea fra le due stazioni che l'arco connette. Questo grafo pesato non è un *small world* perché, pur essendo molto efficiente a livello globale, è carente a livello locale. Questo significa che il sistema non è localmente tollerante agli errori, cioè che un eventuale problema che comporti la chiusura di una stazione blocca il traffico lungo tutta la linea. Evidentemente la metropolitana è stata progettata senza mettere fra gli scopi prioritari quello di costruire un sistema localmente tollerante agli errori. Tutto ciò, perché si può ovviare facilmente alla chiusura di una stazione, ad esempio istituendo un servizio alternativo che colleghi la stazione precedente a quella successiva. E a vantaggio del costo totale della metropolitana, che infatti è estremamente ridotto. È interessante notare che se si analizza l'intera rete di trasporto, costituita sia dalla metropolitana che dal servizio di autobus, si ritrovano le proprietà di *small world*.

5. – Oltre il modello di Watts e Strogatz

Il modello proposto da Watts e Strogatz è solo uno dei modi possibili e più semplici per realizzare *networks* efficienti sia localmente che globalmente. In molti casi, però, questo modello non riesce a riprodurre tutte le proprietà di una rete reale. Sono necessari modelli più realistici che sono stati sviluppati negli ultimi anni ^(35, 38-41). Infatti, *clustering* e breve distanza di separazione non sono le uniche proprietà notevoli di una rete sociale o biologica. Laszlo Barabasi insieme al suo gruppo di collaboratori di Notre Dame

University ha provato, ad esempio, che le reti reali sono caratterizzate dalla presenza di alcuni nodi (*hubs*) con un numero enorme di *links* rispetto alla maggior parte degli altri nodi⁽³⁸⁾. In pratica, se si riporta il numero di nodi di grado k , $N(k)$, in funzione di k , per una rete metabolica⁽⁴²⁾ o di interazione fra proteine, o per i grafi che descrivono gli *hyperlinks* nel *World-Wide-Web* (WWW)⁽⁴³⁾ o le connessioni di *Internet*⁽⁴¹⁾, si ottiene in tutti i casi una curva a legge di potenza:

$$(8) \quad N(k) \sim k^{-\gamma}$$

con esponente γ compreso fra 2 e 3. Questo risultato è diverso da quello che si ottiene per un grafo random alla Erdős-Rényi, per il quale la distribuzione di grado ha una coda che decade esponenzialmente, cioè tutti i nodi hanno più o meno lo stesso numero di *links*. Le reti con una distribuzione $N(k)$ a legge di potenza sono state battezzate reti *scale-free* proprio perché sono prive di scala, in quanto contengono nodi appartenenti a tutte le possibili gerarchie di importanza. Le strutture *scale-free* si presentano soprattutto nei casi di reti che crescono nel tempo, e nelle quali i nodi che si aggiungono alla rete si collegano preferenzialmente ai nodi di grado maggiore^(39,38,43). Si è inoltre provato che una rete con $N(k)$ a legge di potenza è più resistente di una rete random ai guasti e meno agli attacchi^(44,45). Infatti, se si simula un guasto come la disattivazione di un nodo scelto a caso e dei suoi collegamenti, scegliendo in modo casuale il nodo da danneggiare, vi è una buona probabilità che tale nodo non sia rilevante, poiché i nodi con un grado talmente alto da garantire la solidità della rete sono pochissimi. Viceversa, di fronte ad un attacco, la rete porge il suo tallone d'Achille: conoscendo i nodi con il numero maggiore di links (gli *hubs*) un *hacker* può danneggiare un'intera rete di computer attaccando pochi nodi ma ben collegati. Romualdo Pastor-Satorras ed Alessandro Vespignani hanno studiato la propagazione di epidemie su reti di tipo *scale-free* dimostrando che la presenza degli *hubs* implica una assenza di soglia critica: cioè, su di una rete *scale-free* un virus si può diffondere comunque piccola sia la probabilità di contagio⁽⁴⁶⁾.

Un'ulteriore caratteristica di molte reti reali è la presenza di sottostrutture. Nel caso di un sistema sociale, ad esempio, esistono le comunità sociali, cioè gruppi di persone che sono molto connesse fra di loro e poco connesse alle per-

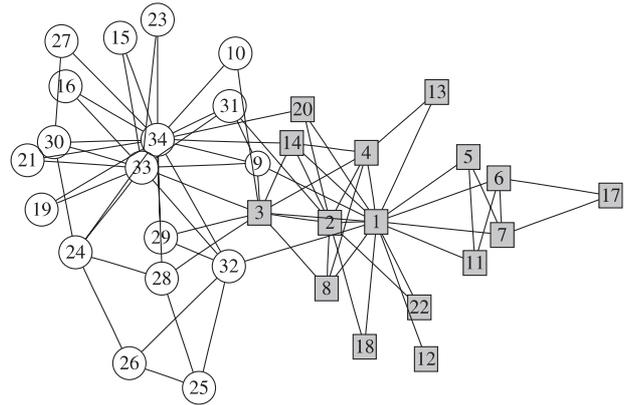


Fig. 5. – Il club di karate di Zachary⁽⁴⁷⁾.

sone di comunità diverse. Un esempio tipico, rappresentato nella fig. 5, è il “karate club di Zachary”, un grafo di 34 nodi e 78 archi ottenuto da un sociologo, Wayne Zachary, che ha seguito per un periodo di due anni l’evolversi delle relazioni interpersonali fra gli iscritti ad un club di karate universitario⁽⁴⁷⁾. In particolare, a causa dei contrasti fra un istruttore e l’amministratore del club, il club dopo i due anni verrà diviso in due clubs più piccoli (A e B). Il grafo rappresenta le relazioni fra i vari iscritti nel periodo dei due anni. Inoltre i nodi sono di due tipi: i cerchi rappresentano gli individui che dopo la divisione scelgono di appartenere al club A e i quadrati quelli che scelgono il club B. Le domande interessanti dal punto di vista della teoria delle reti sono le seguenti: è possibile, a partire dalla struttura del grafo in fig. 5, predire la futura suddivisione del sistema e identificare con esattezza le due classi? E si può in qualche modo dire che la divisione in due sottogruppi è più probabile che quella in tre o in quattro sottogruppi? Vari metodi per determinare le comunità nascoste in un grafo sono stati già sviluppati dai sociologi, ed altri sono stati proposti più di recente dai fisici^(48,49).

6. – Conclusioni

Sono trascorsi pochi anni da quando il lavoro di Watts e Strogatz sugli *small worlds* ha attratto l’attenzione di fisici e matematici verso la caratterizzazione e la modellizzazione di reti complesse. Ne sono scaturiti un enorme numero di progetti e ricerche interdisciplinari (in collaborazione principalmente con biologi, medici e sociologi), di lavori scientifici, e recentemente sono apparsi anche i primi libri divulgativi sul-

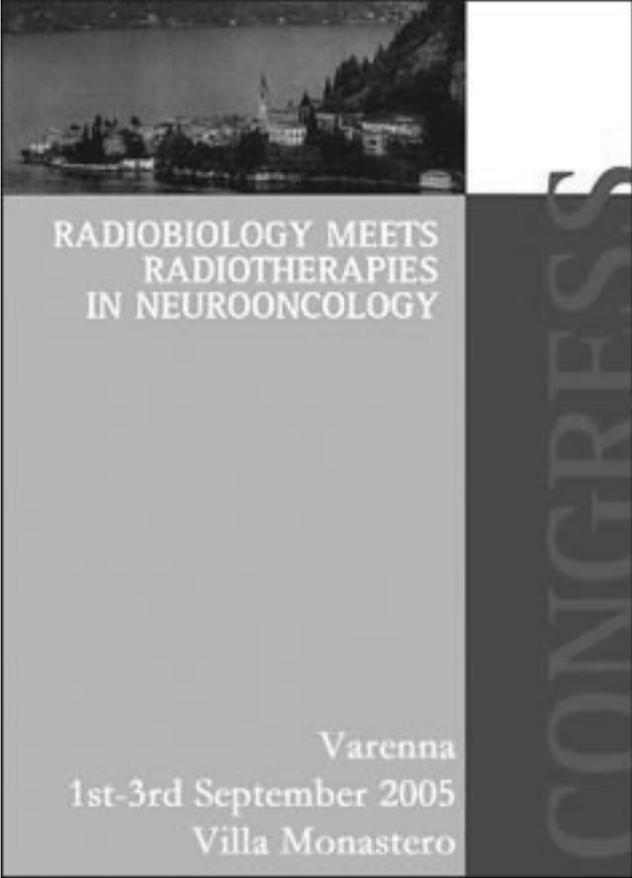
l'argomento (vedi ad esempio rif. ⁽⁵⁰⁾). Ci si sta sempre più convincendo che vari sistemi complessi mostrano la stessa architettura governata da leggi universali che valgono sia per i sistemi sociali, che per le cellule e per le reti di computers. Utilizzando dei modelli estremamente semplici è possibile descrivere e classificare i vari tipi di reti non in funzione del loro particolare campo di applicazione, ma grazie a concetti universali e a tutta una serie di misure come C , L o l'esponente γ . Comprendere queste leggi universali può sicuramente avere importanti conseguenze per lo sviluppo di medicine più efficaci ⁽⁵¹⁾, per contrastare la diffusione di epidemie ⁽⁴⁶⁾, per prevenire *blackouts* in reti elettriche ^(52,53), per difendere *Internet* dagli *hackers* o le reti di trasporto e comunicazione dagli attacchi terroristici ⁽⁵⁴⁾.

Bibliografia

- (1) M. GELL-MANN, *The Quark and the Jaguar* (Freeman, New York) 1994.
- (2) Y. BAR-YAM, *Dynamics of Complex Systems* (Addison-Wesley, Reading Mass) 1997.
- (3) S. H. STROGATZ, *Exploring complex networks*. *Nature*, **410** (2001) 268-276.
- (4) J. GLEICK, *Chaos: Making a New Science* (Penguin Books) 1988.
- (5) T. VICSEK, *Nature*, **411** (2001) 412; **418**, (2002) 131.
- (6) F. T. ARECCHI e A. FARINI, *Lexicon of Complexity* (Studio Editoriale Fiorentino, Firenze) 1996.
- (7) P. W. ANDERSON, *More is Different*, *Science*, **177** (1972) 393.
- (8) E. MAJORANA, *Il valore delle leggi statistiche nella fisica e nelle scienze sociali*, *Scientia*, **36**, (1942) 58-66.
- (9) M. BARANGER, *Chaos, Complexity, and Entropy: a Physics Talk for Non-Physicists* <http://www.necsi.org/projects/baranger/cce.html>
- (10) S. MILGRAM, *The Small World Problem*, *Psychology Today*, **2** (1967) 60.
- (11) <http://www.cs.virginia.edu/oracle/>
- (12) L'Internet Movie Database si trova all'indirizzo <http://www.imdb.com>
- (13) P. ERDŐS e A. RÉNYI, *Publ. Math. Debrecen*, **6** (1959) 290.
- (14) B. BOLLOBÁS, *Random Graphs* (Academic, London) 1985.
- (15) D. J. WATTS, S. H. STROGATZ, *Collective dynamics of 'small-world' networks*, *Nature*, **393** (1998) 440.
- (16) D. J. WATTS, *Small Worlds* (Princeton University Press, Princeton, New Jersey) 1999.
- (17) Vi sono diversi algoritmi che svolgono questo compito in maniera molto efficiente. I più veloci permettono di calcolare allo stesso tempo le distanze fra tutte le coppie di nodi in un tempo $\sim O(N^2 \log N)$.
- (18) A. BARRAT, M. WEIGT, *On the properties of small-world network models*, *Eur. Phys. J. B*, **13** (2000) 547.
- (19) T. B. ACHACOSO, W. S. YAMAMOTO, *AY's Neuroanatomy of C. elegans for Computation* (CRC Press, Boca Raton, FL) 1992.
- (20) M. E. J. NEWMAN, *Scientific collaboration networks*, *Phys. Rev. E*, **64** (2001) 016131; 016132.
- (21) L. A. ADAMIC, *Proceedings of ECDL'99*, LNCS 1696 (1999) 443.
- (22) R. PASTOR-SATORRAS, A. VAZQUEZ, A. VESPIGNANI, *Dynamical and correlation properties of the internet*, *Phys. Rev. Lett.*, **87** (2001) 2587.
- (23) D. FELL, A. WAGNER, *The small world of metabolism*, *Nature Biotechnology*, **18** (2000) 1121. A. WAGNER, D. FELL, *The small world inside large metabolic networks*, *Proc. R. Soc. London Ser. B*, **268** (2001) 1803.
- (24) È interessante ricordare a tal proposito che il Kevin Bacon della comunità dei matematici è proprio Paul Erdős. Il numero di Erdős di un matematico è la sua distanza da Erdős. Chi ha scritto un articolo con Erdős ha numero di Erdős uguale ad 1, chi non ha scritto un articolo con Erdős ma ha scritto un articolo con un coautore di Erdős ha numero di Erdős uguale a 2...
- (25) S. WASSERMAN, K. FAUST, *Social Networks Analysis* (Cambridge University Press, Cambridge) 1994.
- (26) L. C. FREEMAN, C. LINTON, *Centrality in social networks: I. Conceptual clarification*. *Social Networks*, **1** (1979) 215-239.
- (27) V. LATORA, M. MARCHIORI, *A measure of centrality based on the network efficiency*, cond-mat/0402050
- (28) D. LUSSEAU, *The emergent properties of a dolphin social network*. *Proc. R. Soc. London Ser. B*, **270** (2003) S186-S188.
- (29) R. F. CANCHO, C. JANSSEN, R.V. SOLÉ, *Topology of technology graphs: Small world patterns in electronic circuits*, *Phys. Rev. E*, **64** (2001) 046119.
- (30) P. S. DODDS, R. MUHAMAD, D. J. WATTS. *An experimental study of search in global social networks*, *Science*, **301** (2003) 827-829.
- (31) R. ALBERICH, J. MIRO-JULIA, F. ROSSELLO, *Marvel Universe looks almost like a real social network*, cond-mat/0202174
- (32) M. BARTHELEMY, L. AMARAL, *Small-world networks: Evidence for a crossover picture*, *Phys. Rev. Lett.*, **82** (1999) 3180.
- (33) M. E. J. NEWMAN, C. MOORE, D. J. WATTS, *Mean-field solution of the small-world network model*, *Phys. Rev. Lett.*, **84** (2000) 3201.
- (34) K. MEDVEDYEVA, P. HOLME, P. MINNHAGEN, B. J. KIM, *Dynamic critical behavior of the XY model in small-world networks*, *Phys. Rev. E*, **67** 036118 (2003).
- (35) M. E. J. NEWMAN, *Models of the small world*, *J. Stat. Phys.*, **101** (2000) 819; *The structure and function of networks*, *Comput. Phys. Commun.*, **147** (2002) 40.
- (36) V. LATORA, M. MARCHIORI, *Efficient Behavior of Small-World Networks*, *Phys. Rev. Lett.*, **87** (2001) 198701; *Economic Small-World Behavior in Weighted Networks*, *Eur. Phys. J. B*, **32** (2003) 249.
- (37) V. LATORA, M. MARCHIORI, *Is the Boston subway a small-world network?*, *Physica A*, **314** (2002) 109.
- (38) R. ALBERT and A.-L. BARABÁSI, *Statistical mechanics of complex networks*, *Rev. Mod. Phys.*, **74** (2002) 47.
- (39) S. N. DOROGOTSEV, J. F. F. MENDES, *Evolution of networks* (Oxford University Press) 2003.
- (40) M. E. J. NEWMAN, *The structure and function of complex networks*, *SIAM Rev.*, **45** (2003) 167.
- (41) R. PASTOR-SATORRAS, A. VESPIGNANI, *Evolution and Structure of the Internet: A Statistical Physics Approach*, (Cambridge University Press) 2004.
- (42) H. JEONG, B. TOMBOR, R. ALBERT, Z. N. OLTVAI e A.-L. BARABÁSI, *Large-Scale Organization of Metabolic Networks*, *Nature*, **407** (2000) 651.
- (43) A.-L. BARABÁSI, R. ALBERT, *Emergence of scaling random networks*, *Science*, **286** (1999) 509.
- (44) R. ALBERT, H. JEONG, A.-L. BARABÁSI, *Attack Tolerance of Complex Networks*, *Nature*, **406** (2000) 378.
- (45) P. CRUCITTI, V. LATORA, M. MARCHIORI, A. RAPISARDA, *Efficiency of Scale-Free Networks: Error and Attack Tolerance*, *Physica A*, **320** (2003) 622.
- (46) R. PASTOR-SATORRAS and A. VESPIGNANI, *Epidemic spreading in scale-free networks*, *Phys. Rev. Lett.*, **86** (2001) 3200.
- (47) W. W. ZACHARY, *An information flow model for conflict and fission in small groups*. *J. Anthropol. Res.*, **33** (1977) 452.

- (48) M. E. J. NEWMAN, M. GIRVAN, *Finding and evaluating community structure in networks*, *Phys. Rev. E*, **69** (2004) 026113.
- (49) S. FORTUNATO, V. LATORA, M. MARCHIORI, *A Method to Find Community Structures Based on Information Centrality*. *Phys. Rev. E*, **70** (2004) 056104.
- (50) M. BUCHANAM, *Nexus: Small Worlds and the Ground-breaking Science of Networks* (W. W. Norton and Co.), 2002.
- (51) P. TIERI, S. VALENSIN, V. LATORA, G. C. CASTELLANI, M. MARCHIORI, D. REMONDINI e C. FRANCESCHI, *Quantifying the relevance of different mediators in the human immune cell network*. *Bioinformatics*, **21** (2005) 1639.
- (52) P. CRUCITTI, V. LATORA, M. MARCHIORI, *A model for cascading failures in complex networks*, *Phys. Rev. E*, **69** (2004) 045104R.
- (53) R. KINNEY, P. CRUCITTI, R. ALBERT, V. LATORA, *Modeling Cascading Failures in the North American Power Grid*, *Eur. Phys. J. B*, **46** (2005) 101.
- (54) V. LATORA, M. MARCHIORI, *Vulnerability and Protection of infrastructure networks*, *Phys. Rev. E* **71** (2005) 015103R.

86



RADIOBIOLOGY MEETS
RADIOTHERAPIES
IN NEUROONCOLOGY

Varenna
1st-3rd September 2005
Villa Monastero

CONGRESS

Un breve resoconto di questo convegno sarà pubblicato prossimamente nel Nuovo Saggiatore