

בחינה במבוא לאנליזה הרמונית

מועד א - אביב 2015/6

מרצה: סשה סדין

משך המבחן שלוש שעות. פתרו כמה שיותר שאלות. אין להשתמש בחומר עזר לרבות מחשבון.

שאלה 1 (35 נקודות)

(א) חשבו את התמרת פוריה של $f(x) = \frac{\sin^2(\pi x)}{(\pi x)^2}$

(ב) חשבו את $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$

שאלה 2 (30 נקודות)

יהיו $R > 0, z \in \mathbb{C}$ מצאו את

$$\min \left\{ \|f\|_2 \mid f \in L_2(\mathbb{R}), \text{supp } \hat{f} \subset [-R, R], f'(z) = 1 \right\}$$

שאלה 3 (20 נקודות)

הראו כי ההזזות של סדרה $a = (a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell_2(\mathbb{Z})$

פורשות תת-מרחב צפוף ב- $\ell_2(\mathbb{Z})$ אם ורק אם מתקיים:

$$\text{mes} \{f = 0\} = 0$$

באשר f מוגדרת ע"י $\hat{f} = a$

שאלה 4 (15 נקודות)

יהי $k \geq 2$ ויהיו $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^2$

נגדיר $x_1^{(n)}, \dots, x_k^{(n)} \in \mathbb{R}^2$ באופן הבא:

$$x_j^{(0)} = x_j, \quad x_j^{(n+1)} = \frac{1}{2} (x_j^{(n)} + x_{j+1}^{(n)})$$

באשר $x_{k+1}^{(n)} = x_1^{(n)}$

נסמן ב- $\bar{x} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k x_j$ את מרכז הכובד. הראו כי

$$\max_{1 \leq j \leq k} |x_j^{(n)} - \bar{x}| \leq \sqrt{k} \cos^n \frac{\pi}{k} \times \max_{1 \leq j \leq k} |x_j - \bar{x}|$$

