להגשה עד:
5/4/2016

אנליזה הרמונית

תרגיל 5

① יהי $\Gamma \subset \mathbb{Z}^d$ סריג, ונגדיר $\Gamma' = \{k' \in \mathbb{R}^d \mid \forall k \in \Gamma\ \langle k, k' \rangle \in \mathbb{Z}\}$.
הוכיחו: (א) Γ' - סריג, (ב) $(e_{k'})_{k' \in \Gamma'}$ - בסיס אורתונורמלי ב- $L_2(\mathbb{R}^d/\Gamma)$.

② תהי π התפלגות על $\mathbb{Z}^d$ כך ש- $|\operatorname{supp} \pi| < \infty$, $\operatorname{span} \operatorname{supp} \pi = \mathbb{R}^d$, ו- $\sum k\, \pi(k) = 0$. הוכיחו:
ההילוך המקרי המוגדר ע"י $\mathbb{P}\{k \to \ell\} = \pi(\ell - k)$
חוזר לראשית, ∞ פעמ' אם"ם $d=1,2$ ומספר
סופי של פעמים אם $d \geq 3$.

③ תהי $\mu \geq 0$ מידה על $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $\mu(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) = 1$.
הוכיחו כי מתקיימת אחת משתי האפשרויות הבאות (בדיוק):
(i) קיימים טבעי, $a \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ כך ש- $\operatorname{supp} \mu \subset a + \frac{\mathbb{Z}}{n}$
(ii) לכל $f \in C(\mathbb{T})$

$$\lim_{n\to\infty} \int d\mu(x_1) \cdots \int d\mu(x_n)\, f(x_1 + \cdots + x_n) = \int f(x)\, dx.$$

④ תהי $L_2(\mathbb{T}) \ni f$. הוכיחו ש- $\hat{f}(n) \neq 0$ לכל n אם ורק אם המרחב $\operatorname{span}_{t\in\mathbb{T}} (f_t)$ צפוף ב- $L_2(\mathbb{T})$, כאשר $f_t(x) = f(x+t)$.

⑤ יהיו μ, ν מידות על $\mathbb{T}$, נסמן:
$(\mu * \nu)(A) = \int d\mu(x) \int d\mu(y)\, \mathbb{1}_{x+y\in A}$. הוכיחו שאוסף המוגדרת
(ממוכללת) הבורליות A ב- $\mathbb{T}$ - σ-אלגברה [illegible] [illegible]
עד [illegible].