להגשה עד
סוף הסמסטר

אנליזה הרמונית

תרגיל 11

① תהי G חבורה אבלית סופית. נקרא $\chi: G \to \mathbb{C}$ קרקטר אם $|\chi(g)|=1$ ו- $\chi(gh)=\chi(g)\chi(h)$, $g,h \in G$.
מצאו את כל הקרקטרים מפורש (א) $G=\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, $q \geq 2$ (ב) $G=G_1 \times G_2$ והקרקטרים של G_1, G_2 ידועים, (ג) G - חבורת השאריות מודולו p שאינן שוות לאפס, עם פעולת הכפל.

② יהי N_p מספר הפתרונות ל- $x^2+y^2+z^3=0$ ב- $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^3$, p - ראשוני. הוכיחו: $|N_p-p^2| \leq 2p^{7/4}$.

③ (א) $\left(\frac{-1}{p}\right)=(-1)^{(p-1)^2/4}$ (ב) $\left(\frac{2}{p}\right)=(-1)^{(p^2-1)/8}$

④ (א) $f: \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ מקיימת $\sum_{j,k=1}^{N} f(g_j-g_k) z_j \bar{z}_k \geq 0$ $\forall z_1, \dots, z_N \in \mathbb{C}$ $\forall g_1, \dots, g_N \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ $\forall N$ אם ורק אם $\hat{f} \geq 0$.
(ב) אם $\pi: \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \to GL_m(\mathbb{C})$ - הומומורפיזם של חבורות אז $\mathrm{tr}\,\pi = \sum_{k=0}^{q-1} m_k e_k$, כאשר $m_k \in \mathbb{Z}_+$, $\sum m_k = m$.

⑤ (א) יהיו X, Y משתנים מקריים בלתי תלויים שמקבלים ערכים ב- $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. אם $X+Y$ מתפלג אחיד ($\mathbb{P}((X+Y)=0)=\mathbb{P}((X+Y)=1)=\frac{1}{2}$) אזי אחד משני המשתנים לפחות מתפלג אחיד.
(ב) האם ההכללה המקבילה נכונה ב- $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ עבור $q=4$?

⑥ חשבו את $\hat{f}$ כאשר $f: \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, $f(k)=\begin{cases} 0, & (k,q) \neq 1 \\ 1, & (k,q)=1 \end{cases}$